ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

—————o0o—————

VIÊN ÁNH NGỌC

ƯỚC LƯỢNG METRIC KOBAYASHI TRÊN CÁC MIỀN TRONG $\mathbb{C}^n$

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, 4/2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

o0o

VIÊN ÁNH NGỌC

ƯỚC LƯỢNG METRIC KOBAYASHI TRÊN CÁC MIỀN TRONG $\mathbb{C}^n$

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Toán Giải tích**
Mã số: **8460102**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. TRẦN HUỆ MINH

Thái Nguyên, 4/2019

LỜI CAM ĐOAN

Em xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng em dưới sự hướng dẫn của TS. Trần Huệ Minh. Em không sao chép từ bất kì công trình nào khác.

Các tài liệu trong luận văn là trung thực, em kế thừa và phát huy các thành quả khoa học của các nhà khoa học với sự biết ơn chân thành.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019
Người viết luận văn

Viên Ánh Ngọc

Xác nhận của Khoa chuyên môn	Xác nhận của Người hướng dẫn khoa học

LỜI CẢM ƠN

Trước khi trình bày nội dung chính của khóa luận, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Tiến sĩ Trần Huệ Minh, người đã tận tình hướng dẫn và truyền đạt những kinh nghiệm học tập, nghiên cứu để em có thể hoàn thành luận văn này.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Phòng Đào tạo - Bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên và Viện Toán học đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho em trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Do thời gian thực hiện luận văn không nhiều, kiến thức còn hạn chế nên bài luận văn không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn. Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Người viết luận văn

Viên Ánh Ngọc

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Metric Kobayashi trên một miền Ω trong $\mathbb{C}^n$ tại điểm $p \in \Omega$ theo hướng $\xi \in T_p\Omega$ được định nghĩa bởi:

$$F(p, \xi) = inf\ \{\alpha > 0 \,|\, \exists \Phi \in Hol(D, \Omega) : \Phi(0) = p, \Phi'(0) = \xi/\alpha\}\,,$$

trong đó $Hol(D, \Omega)$ là ký hiệu họ các ánh xạ chỉnh hình từ đĩa đơn vị D trong $\mathbb{C}$ vào Ω. Metric Kobayashi là metric lớn nhất trong các metric bất biến song chỉnh hình G mà thỏa mãn các tính chất:

i) $G^D : D \times \mathbb{C} \to R^+ \cup \{0\}$ trùng với metric Poincare trên đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$

ii) G có tính chất giảm qua các ánh xạ chỉnh hình, tức là nếu $\Phi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ là ánh xạ chỉnh hình và $p \in \Omega, \xi \in T_p\Omega$ thì

$$G^{\Omega}(p, \xi) \geq G^{\tilde{\Omega}}(\Phi(p), \Phi_*(p)\xi).$$

Trong những năm gần đây, việc tìm hiểu ước lượng của metric Kobayashi đã được nhiều nhà toán học như I. Graham, D.Catlin, S.G.Krantz, Lina Lee, S.Fu, Peter Pflug,... quan tâm nghiên cứu, các tác giả đã đưa ra nhiều kết quả về ước lượng cho metric Kobayashi trên các miền trong $\mathbb{C}^n$ và sử dụng các ước lượng này để nghiên cứu bài toán ánh xạ.

Với lý do này, em đã lựa chọn đề tài nghiên cứu " Ước lượng metric Kob trên các miền trong $\mathbb{C}^n$ " làm luận văn tốt nghiệp. Đề tài có ý nghĩa thời sự, đã và đang được các nhà toán học quan tâm, nghiên cứu.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận văn là nghiên cứu, tìm hiểu và trình bày lại một số kết quả về ước lượng của metric Kobayashi trên các miền bị chặn trơn, miền lồi và miền giả lồi loại hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu

Hệ thống lại các kết quả và trình bày tổng quan về ước lượng của metric Kobayashi trên các miền trong $\mathbb{C}^n$.

4. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng kết hợp các phương pháp phân tích và tổng hợp lý thuyết, phương pháp phân loại và hệ thống hóa lý thuyết.

5. Bố cục của luận văn

Luận văn được viết chủ yếu dựa trên các tài liệu [3], [4], [5], [6, [7] gồm 36 trang trong đó có phần mở đầu, 2 chương nội dung, phần kết luận và tài liệu tham khảo. Cụ thể là:

- Chương 1: Trình bày các kết quả về ước lượng metric Kobayashi trên các miền trong $\mathbb{C}^n$, phần đầu của chương trình bày về ước lượng metric Kobayashi trên một miền trong $\mathbb{C}\backslash\{\,0,1\}$, phần tiếp theo là ước lượng metric Kobayashi trên một miền trong $\mathbb{C}^2$, phần cuối của chương trình bày các kết quả trên một miền bị chặn trơn trong $\mathbb{C}^n$.
- Chương 2: Trình bày các khái niệm về hàm đa điều hòa, hàm đa điều hòa dưới, và một số kết quả của metric đa điều hòa dưới (metric Sybony) và sử dụng metric này để ước lượng metric Kobayashi trên các miền lồi và giả lồi loại hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$.
- Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt các kết quả đạt được và danh mục tài liệu tham khảo.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của TS Trần Huệ Minh, do thời gian nghiên cứu không có nhiều và kiến thức của em còn hạn chế nên bản luận văn của em không tránh khỏi khiếm khuyết, em rất mong nhận được những góp ý của Thầy Cô và bạn đọc để bản luận văn được hoàn chỉnh hơn.

Em xin chân thành cảm ơn !

Chương 1

Ước lượng metric Kobayashi trên các miền trong $\mathbb{C}^n$.

1.1. Ước lượng metric Kobayashi trên miền $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$.

Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$, $P \in \Omega$ và $\xi \in \mathbb{C}^n$, ta kí hiệu $Hol(P,\xi)$ là họ các ánh xạ chỉnh hình Φ từ đĩa đơn vị $\Delta \subset \mathbb{C}$ vào Ω sao cho $\Phi(0) = P$ và $\Phi'(0) = \xi$. Khi đó độ dài Kobayashi của ξ tại điểm P được định nghĩa bởi

$$F_K^{\Omega}(P,\xi) \equiv \inf\{\alpha : \alpha > 0, \exists\Phi \in Hol(P,\xi), \Phi'(0) = \frac{\xi}{\alpha}\}.$$

Trong phần này, ta trình bày ước lượng metric Kobayashi tại các điểm biên trên miền $\Delta\setminus\{0\}$ và $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, ở đây Δ là kí hiệu của đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$, $\Delta = \{z \in \mathbb{C}\,||z| < 1\}$.

Bổ đề 1.1.1. [5] *Giả sử Ω là một miền liên thông trong $\mathbb{C}$ có không gian phủ là nửa phẳng H. Lấy $q \in H$ và $m : H \to \Delta$ là ánh xạ song chỉnh hình sao cho $m(q) = 0$. Lấy $P \in \Omega, \xi \in \mathbb{C}^n$ và $\pi : H \to \Omega$ mà $\pi(q) = P$. Khi đó*

$$F_K^{\Omega}(P,\ \xi) = \frac{|m'(q)|}{|\pi'(q)|}\|\xi\|.$$

Chứng minh

Lấy f là một hàm phù hợp với metric Kobayashi tại điểm P và $f'(0)$ là bội của ξ. Vì đĩa đơn vị là liên thông nên tồn tại ánh xạ nâng duy nhất $\tilde{f} : \Delta \to H$ sao cho $\tilde{f}(0) = q$ làm giao hoán biểu đồ sau

Lấy π^{-1} là nghịch đảo địa phương trong một lân cận của p. Vì $m\circ\tilde{f}(0) = 0$ và $\tilde{f} = \pi^{-1}\circ f$, từ bổ đề Schwarz ta có

$$\left| m'(q)\cdot\left(\pi^{-1}\right)'(P)\cdot f'(0)\right| \quad \leq 1,$$

suy ra

$$\frac{1}{|f'(0)|} \geq \frac{|m'(q)|}{|\pi'(q)|}\ .$$

Ước lượng này đạt được với bất kì hàm f và ánh xạ $\pi\circ m^{-1}$ cùng là hàm phù hợp với metric Kobayashi nên ta có điều phải chứng minh. □

Sử dụng bổ đề trên, ta ước lượng được metric Kobayashi tại các điểm biên trên miền $\Delta\backslash\{0\}$ và $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$.

Ta có mệnh đề sau

Mệnh đề 1.1.2. [5] *Lấy p là một điểm thuộc* $\Delta\backslash\{0\}$ *sao cho dist (p,0)* $= \delta$ *và lấy* $\xi = 1$. *Với bất kì* $\delta > 0$, *ta có*

$$F_K^{\Delta\backslash\{0\}}(p,\xi) = \frac{1}{2\delta log\frac{1}{\delta}}.$$

Chứng minh

Xét ánh xạ từ $\Delta\backslash\{\ 0\}$ vào $\Delta\backslash\{\ 0\}$ xác định bởi $z\mapsto ze^{i\theta}$. Ta chỉ cần chứng minh mệnh đề trên trong trường hợp $p = 0$.

Lấy H_{left} là nửa phẳng $\{\mathrm{Re}(z) < 0\}\subset\mathbb{C}$. Ánh xạ phủ được xác định bởi $\pi : H_{left}\to\Delta\backslash\{0\}, z\mapsto e^z$. Lấy $q = log\delta$, khi đó $m : H_{left}\to\Delta$ được xác định bởi

$$m(z) := \frac{z-\log\delta}{z+\log\delta},\ \text{với}\ m'(q) = \frac{1}{2\log\delta}.$$

Từ bổ đề 1.1.1, ta có

$$F_K^{\Delta\backslash\{0\}}(\delta,1) = \frac{1}{2\delta|log\delta|} = \frac{1}{2\delta log(1/\delta)}.$$ □

Để ước lượng metric Kobayashi cho miền $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{\ 0,1\}$ ta phải xét hàm modular elliptic như ánh xạ phủ từ nửa phẳng tới Ω và ước lượng đạo hàm của nó. Hàm modular elliptic được xác định bởi

$$\lambda(\tau) = \frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\cos^2\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau\right)} - \frac{1}{\sin^2\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau\right)}\right]}{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\cos^2(\pi n\tau)} - \frac{1}{\sin^2\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau\right)}\right]} =: \frac{N(\tau)}{D(\tau)}.$$

Ta xét bổ đề sau

Bổ đề 1.1.3 [5] *Khi $Im(\tau) \to \infty$, đạo hàm của $N(\tau)$ là bị chặn đều bởi một hằng số:*

$$\left| \frac{d}{d\tau} D(\tau) \right| < C \tag{1.1}$$

với $C > 0$ và các đạo hàm của $N(\tau)$ thỏa mãn

$$\left| \frac{d}{d\tau} N(\tau) \right| \lesssim \left| e^{i\pi\tau} \right| = e^{-\pi \operatorname{Im}(\tau)}. \tag{1.2}$$

Chứng minh

Với $z = x + iy$, ta có :

$$\begin{aligned} sin(z) &= \frac{1}{2i} \left(e^{i(x+iy)} - e^{i(x+iy)} \right) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{ix} e^{-y} - e^{-ix} e^{y}). \end{aligned}$$

Do vậy, với $|y| > \frac{1}{2} \ln 2$, ta có

$$\frac{1}{4} e^{|y|} < |sinz| < e^{|y|}. \tag{1.3}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{1}{4} e^{|y|} < |cosz| < e^{|y|}. \tag{1.4}$$

Sử dụng (1.3) và (1.4), các đạo hàm của các phần tử cosin của $D(\tau)$ ngoại trừ phần tử ứng với $n = 0$, được ước lượng bởi

$$\left| \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\cos^2(\pi n \tau)} \right| = \left| \frac{2\pi n \sin(\pi n \tau)}{\cos^3(\pi n \tau)} \right| \lesssim \frac{|n|}{e^{2\pi |n| \operatorname{Im}(\tau)}}, \tag{1.5}$$

khi $\operatorname{Im}(\tau) \to \infty$.

Tương tự, ta có

$$\left| \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\sin^2\left(\pi(n - \frac{1}{2})\tau\right)} \right| = \left| \frac{2\pi \left(n - \frac{1}{2}\right) \cos\left(\pi \left(n - \frac{1}{2}\right) \tau\right)}{\sin^3\left(\pi \left(n - \frac{1}{2}\right) \tau\right)} \right| \lesssim \frac{\left|n - \frac{1}{2}\right|}{e^{2\pi \left|n - \frac{1}{2}\right| Im\ (\tau)}}, \tag{1.6}$$

và

$$\left| \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\cos^2\left(\pi(n - \frac{1}{2})\tau\right)} \right| = \left| \frac{2\pi \left(n - \frac{1}{2}\right) \sin\left(\pi \left(n - \frac{1}{2}\right) \tau\right)}{\cos^3\left(\pi \left(n - \frac{1}{2}\right) \tau\right)} \right| \lesssim \frac{\left|n - \frac{1}{2}\right|}{e^{2\pi \left|n - \frac{1}{2}\right| Im\ (\tau)}}, \tag{1.7}$$